Вычислительные процедуры анализа модели предприятия

А.Ф. Ерешко , email: asprs@yandex.ru[1]
А.Н. Сытов, email: an-sytov@yandex.ru[1]
А.В. Вахранев, email: anton22255@yandex.ru [1]

[1] Вычислительный Центр ФИЦ ИУ РАН

Аннотация. *Рассматривается модель динамики предприятия с системных позиций. Анализируются правила формирования стратегий управления в аналитическом виде и в результате вычислительных экспериментов. Используются технологии моделирования, которые продолжают традиции рассмотрения процессов принятия решений с точки зрения теории исследования операций. Базовым приёмом выступает организация вычислительных экспериментов на основе прямой и обратной прогонки систем уравнений динамики производственных процессов.*

Ключевые слова: *динамика, модель предприятия, исследование операций, математическое программирование, вычислительные алгоритмы.*

Введение

В настоящее время основным трендом экономического развития выступает цифровизация экономики и всего общества. Проводимая масштабная цифровизация технологий приводит к формированию Цифровых платформ (ЦП).

В программе развития цифровой экономики Российской Федерации до 2035 года ЦП определяется следующим образом.

1. Модель деятельности (в том числе бизнес-деятельности) заинтересованных лиц на общей платформе для функционирования на цифровых рынках.

2. Площадка, поддерживающая комплекс автоматизированных процессов и модельное потребление цифровых продуктов (услуг) значительным количеством потребителей.

3. Информационная система (ИС), ставшая одним из лидирующих решений в своей технологической нише (транзакционной, интеграционной и т.п.).

Основным инструментом исследований и последующего проектирования ЦП, выступают математическое моделирование, информационное обеспечение и алгоритмы вычислительных процедур.

Далее рассматриваются приложения общих теоретических установок к анализу моделей предприятий, имеющих сложную иерархическую систему управления.

1. Теория исследования операций и системный анализ - фундаментальные основания управления развитием экономики

В работах школы академика Моисеева Н.Н и проф. Гермейера Ю.Б. была разработана комплексная методология принятия решений в социально-экономических системах. Придавалось большое значение разработке различных процедур согласования интересов и взаимодействий в иерархических системах в рамках информационной теории иерархических систем и теории игр с непротивоположными интересами [1-3]. Проблема централизации – децентрализации рассмотрена в [4].

В области моделирования и вычислительных прикладных разработок по проблемам развития социально-экономических систем задачи принятия решений эффективно исследовались на основе теории линейных производственных процессов и подходов линейного программирования, что предполагало использование гипотезы В.В. Леонтьева о постоянстве норм затрат на выпуск продукции в процессе производства. В настоящее время, вследствие расширения экономических связей и диверсификации производства, гипотеза В.В. Леонтьева заменена гипотезой о постоянстве структуры финансовых затрат в процессе производства товаров и услуг с учётом их отраслевой дифференциации. Эта гипотеза соответствует допущению, что производитель фиксирует пропорции своих расходов, в рамках которых в зависимости от ценовой конъюнктуры осуществляет материальные затраты, варьируя качество приобретаемых товаров и услуг. В отличии от «леонтьевских» отраслевых производственных функций с постоянными пропорциями ей соответствуют производственные функции типа Кобба-Дугласа [5].

2. Подход к построению базовой модели производственно-экономической деятельности организаций

В экономико-математическом моделировании [6-8] активно разрабатывался подход к формальному описанию производственно-экономического взаимодействия на уровне предприятий (организаций).

Опираясь на опыт этих разработок, предлагается принять описание предприятия в виде следующей Базовой модели, включающей следующие основные блоки.

Материальный баланс. Блок «Производство»: X_k^p – запасы продуктов на начало шага t (вектор соответствующей размерности).

Следующие переменные относятся к шагу t: z_k^p – выпуск продуктов; $\mathbf{y}_k^{p,\varphi}$ – количество продуктов, идущих на создание производственных фондов (фондообразующие продукты); $y_k^{p,p}$ – количество продуктов идущих непосредственно на производство (сырьевые продукты); $x_k^{p,+}$ – количество продуктов поступающих на предприятие; $x_k^{p,-}$ – количество продуктов уходящих с предприятия. Тогда динамика количества продуктов предприятия описывается следующим конечно-разностным уравнением:

$$X_k^p(t+1) = X_k^p(t) + x_k^{p,+}(t) + z_k^p(t) - x_k^{p,-}(t) - y_k^{p,p}(t) - \\ - y_k^{p,\varphi}(t), X_k^p(1) = X_k^{p,0}. \quad (1)$$

Блок «Производственные фонды»: $X_k^\varphi(t)$ – количество производственных фондов на начало шага t (вектор соответствующей размерности), $z_k^\varphi(t)$ – производственные фонды, созданные на шаге t. Динамика количества производственных фондов:

$$X_k^\varphi(t+1) = X_k^\varphi(t) + z_k^\varphi(t), X_k^\varphi(1) = X_k^{\varphi,0}. \quad (2)$$

Блок «Труд»: $X_k^l(t)$ численность сотрудников различных специальностей на начало шага t (вектор размерности); $x_k^l(t)$ – изменение численности персонала предприятия на шаге t.

$$X_k^l(t+1) = X_k^l(t) + x_k^l(t) \quad (3)$$

Пусть u_k^p – вектор интенсивностей процессов производства, а u_k^φ – вектор интенсивностей процессов создания фондов. Запишем линейные соотношения, описывающие выпуск продукции и создание производственных фондов:

$$z_k^p(t) = A_k^p(t) \cdot u_k^p(t), B_k^p(t) \cdot u_k^p(t) \le q_k^p(t), \quad (4)$$

$$z_k^\varphi(t) = A_k^\varphi(t) \cdot u_k^\varphi(t), B_k^\varphi(t) \cdot u_k^\varphi(t) \le q_k^\varphi(t), \quad (5)$$

$$q_k^p(t) = \left(\mathbf{y}_k^{p,p}(t), X_k^l(t), X_k^\varphi(t)\right), \\ q_k^\varphi(t) = \left(\mathbf{y}_k^{p,\varphi}(t), X_k^l(t), X_k^\varphi(t)\right). \quad (6)$$

Здесь A_k^p, A_k^φ – матрицы удельных норм выпуска продукции и создания фондов; B_k^p, B_k^φ – матрицы удельных затрат выпуска продукции и создания фондов. Также мы ввели обозначения $q_k^p(t)$ и $q_k^\varphi(t)$ для векторов ресурсов, необходимых соответственно для производства продукции и создания фондов на шаге t.

Замечание. В данной записи использована производственная функция Леонтьева. В случае использования производственной функции Кобба-Дугласа в соотношениях модели будет принята зависимость вида:

$$F_i\left(t, q^p(t)\right) = a_i \cdot \prod_{i \in I^p} \left(y_i^{p,p}(t)\right)^{\alpha_i} \prod_{r \in R^p} \left(X_r^l(t)\right)^{\alpha_r} \prod_{j \in J^p} \left(X_j^f(t)\right)^{\alpha_j} \quad (7)$$

Финансовый баланс. $Q_k^{p,-}$ – поступления денежных средств в качестве оплаты за продукты, уходящие с предприятия; $Q_k^{p,+}$ – оплата приходящих на предприятие продуктов; Q_k^l – оплата труда сотрудников предприятия; $U_k^{p,+}$ – балансовая стоимость продуктов приходящих на предприятие; $U_k^{p,z}$ – балансовая стоимость произведенных продуктов; $U_k^{p,-}$ – балансовая стоимость продуктов уходящих с предприятия; $U_k^{p,p}$ – балансовая стоимость продуктов идущих на производство; $U_k^{p,\varphi}$ – балансовая стоимость продуктов идущих на создание производственных фондов; $U_k^{\varphi,-}$ – амортизация производственных фондов, $H_k^c(t)$ - заимствования предприятия по ставке $\gamma_k(t)$.

Следующие переменные относятся к началу шага $t: M_k$ – касса предприятия; S_k^p – товарные запасы; S_k^φ – основные фонды; A_k – активы предприятия; L_k – обязательства; E_k – собственный капитал;

$$\begin{aligned} M_k(t+1) &= M_k(t) + Q_k^{p,-}(t) + H_k^c(t) - Q_k^{p,+}(t) - \\ &- Q_k^l(t) - \left(1 + \gamma_k(t-1)\right) \cdot H_k^c(t-1), M_k(1) = M_k^0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_k^p(t+1) &= S_k^p(t) + U_k^{p,+}(t) + U_k^{p,z}(t) - U_k^{p,-}(t) - \\ &- U_k^{p,p}(t) - U_k^{p,\varphi}(t), S_k^p(1) = S_k^{p,0}, S_k^p(1) = S_k^{p,0}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$S_k^\varphi(t+1) = S_k^\varphi(t) + U_k^{\varphi,z}(t) - U_k^{\varphi,-}(t), S_k^\varphi(1) = S_k^{\varphi,0}; \quad (10)$$

$$
\begin{aligned}
&A_k(t+1) = A_k(t) + M_k(t+1) - M_k(t) + S_k^p(t+1) - \\
&- S_k^p(t) + S_k^\varphi(t+1) - S_k^\varphi(t),\, A_k(1) = A_k^0;
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
L_k(t+1) = L_k(t) + H_k^c(t) - H_k^c(t-1),\, L_k(1) = L_k^0; \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_k(t+1) = E_k(t) + Q_k^{p,-}(t) + U_k^{p,+}(t) + U_k^{p,z}(t) + \\
&+ U_k^{\varphi,z}(t) - Q_k^{p,+}(t) - U_k^{p,p}(t) - U_k^{p,-}(t) - -U_k^{p,\varphi}(t) - \\
&- Q_k^l(t) - \gamma_k(t-1)\cdot H_k^c(t-1) - U_k^{\varphi,-}(t),\, E_k(1) = E_k^0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Задача оптимизации в Базовой модели. Возможны различные постановки оптимизационных (централизация) и теоретико-игровых задач (децентрализация), одной из простейших может быть следующая. Выберем в качестве управления переменные $x_k^{p,+}(t)$, $y_k^{p,p}(t)$, $y_k^{p,\varphi}(t)$, $x_k^{p,-}(t)$, $u_k^p(t)$, $u_k^\varphi(t)$, $H_k^c(t)$, $t = 1,\ldots,T$ и рассмотрим задачу $E_k(T+1) \to \max$ (максимизация конечного капитала), при условии неотрицательности управляющих и фазовых переменных $X_k^p(t)$, $M_k(t)$, $t = 2,\ldots,T+1$, а также с учетом ограничений по ресурсам для выпуска продукции и создания производственных фондов, которые описываются соответствующими линейными неравенствами.

Предлагается далее в Базовой модели использовать расширение данного описания путём учёта связей между агентами технологического графа, производственных функций организаций, дополнения описанием развития мощностей и формулировками задач принятия решений с учётом неопределённостей и рисков для построения общей системы математического обеспечения принятия решений производственным комплексом.

3. Оценка значения капитала методами прогонки

Для того, чтобы оценить конечный капитал $E_k(T+1)$, при расчёте состояний модели, естественно использовать методы прямой прогонки из начального состояния:

$$
\theta_j(1) = \begin{bmatrix} x_k^{p,+}(1), y_k^{p,p}(1), y_k^{p,\varphi}(1), x_k^{p,-}(1), \\ u_k^p(1), u_k^\varphi(1), H_k^c(1), q_k^p(1), q_k^\varphi(1) \end{bmatrix}, \tag{14}
$$

используя управления, выбор переменных на каждом шаге $t = 1,\ldots,T$:

$$\pi_l(t) = \begin{bmatrix} x_k^{p,+}(t), y_k^{p,p}(t), y_k^{p,\varphi}(t), x_k^{p,-}(t), \\ u_k^p(t), u_k^{\varphi}(t), H_k^c(t) \end{bmatrix}; \qquad (15)$$

и рассчитывая $E_k(t)$ после каждого шага $t = 1,\ldots,T$ согласно уравнению (13). Ресурсы, запасы и активы модели также пересчитываются на каждом шаге t и учитывают изменения на шаге $t-1$.

```
Procedure evaluteCapital{
Input: t=1 – шаг алгоритма,
T – горизонт планирования,
θ_j(1) - заданное начальное состояние модели;
Output: {[⟨π_k(1), π_k(2),…, π_k(T)⟩, E_k(T+1)]}_k - наборы управления и
соотв. значение конечного капитала на шаге T+1;
If (t>T){ record {[⟨π_k(1), π_k(2),…, π_k(T)⟩, E_k(T+1)]}_k
}else{ // выбираем управление
            For( π_l(t) ∈ {π_i(t)} ){calculate E_k(t)
                         evaluteCapital(t+1)}}
}
```

Процедура evaluteCapital() позволяет построить область значений для $E_k(T+1)$. Если задать область определения для начального состояния модели $\theta_j(1)$, можно найти локальный максимум $E_k(T+1)$ и последовательность оптимального управления $\langle \pi_k(1), \pi_k(2), \ldots, \pi_k(T) \rangle$ для его достижения.

```
Procedure findLocalMax(){
Input: {θ_j(1)} - начальные состояния модели,
       T – горизонт планирования;
Output: E*_k(T+1) - макс. значение конечного капитала,
        (θ_j^m, ⟨π_j^m(1),…, π_j^m(T)⟩)* - оптимальное управление;
For( θ_j(1) ∈ {θ_y(1)} ){
     E_j^m(T+1) = max(evaluteCapital(θ_j(1), T))
     (θ_j^m, ⟨π_j^m(1),…, π_j^m(T)⟩) = which max(evaluteCapital(θ_j(1), T)) }
Return E*_k(T+1) = max E_j^m(T+1) ,
        (θ_j^m, ⟨π_j^m(1),…, π_j^m(T)⟩)* = which max E_j^m(T+1) }
```

4. Постановка задач математического программирования для модели

Для решения задач управления к настоящему времени разработаны различные подходы математического программирования: линейного, нелинейного (выпуклого), динамического программирования.

При использовании методов линейного программирования на каждом шаге прямой прогонки мы решаем следующую задачу по оптимизации линейного критерия при линейных ограничениях:

$$(c, x) \to \max, Ax \le b, x \subset E_n^+ \tag{16}$$

или в развёрнутой форме

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_i \le b_j, \; j = 1,\dots,m, \; x_i \ge 0, i = 1,\dots,n. \tag{17}$$

Модель линейного программирования стандартного вида широко используется в задачах планирования распределения ресурсов предприятия. Параметры модели трактуются в рамках гипотезы Леонтьева. Для завершения описания модели предполагаем, что система ограничений совместна, т.е. существует такой вектор $x_0 \ge 0$, что $Ax_0 < b$. С формальной точки зрения для анализа описанной модели весьма плодотворной оказалась идея введения функции Лагранжа

$$L(x, \lambda) = (c, x) + (\lambda, b - Ax) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i) \tag{18}$$

где $\lambda_j \ge 0$, $j = 1,\dots,m$ компоненты вектора λ, носят название множителей Лагранжа и имеют несколько интерпретаций.

Принимаем здесь, что имеет место следующий формальный факт, на который будут опираться итеративные процедуры. Предполагается, что для описанной задачи линейного программирования существуют ограниченные множества $X \subset E_n^+$ и $\Lambda \subset E_m^+$, такие, что

$$X = \left\{ x \subset E_n^+ \middle| 0 \le x_i \le \xi_i \right\}, \Lambda = \left\{ \lambda \subset E_m^+ \middle| 0 \le \lambda_i \le \eta_j \right\}. \tag{19}$$

Тогда $\max\limits_{x \subset X} \min\limits_{\lambda \subset \Lambda} \left[(c, x) + (\lambda, b - Ax) \right] = \min\limits_{\lambda \subset \Lambda} \max\limits_{x \subset X} \left[(c, x) + (\lambda, b - Ax) \right]$, т.е. операции max и min функции Лагранжа перестановочны.

Этот факт существования седловой точки функции Лагранжа позволяет применить для поиска решения сформулированной задачи эффективные, имеющие ясную содержательную трактовку, итеративные алгоритмы [9].

К настоящему времени разработан большой спектр прикладных пакетов линейного программирования. Практическое использование пакета ЛП из сервиса МАТЕМАТИКА на контрольных примерах в описанной модели предприятия в нашем случае продемонстрировало вполне достаточную эффективность пакета и его пригодность для вычислительных экспериментов.

В задачах выпуклого программирования формальная запись для модели принятия решений имеет вид

$$f(x) \to \max, g(x) \le b, x \ge 0. \quad (20)$$

Здесь $f(x)$ - скалярная функция цели предприятия, вектор-функция $g(x)$ описывает потребность в ресурсах, которая формируется некоторой активностью производства предприятия, переменная $x \ge 0$ численно отражает производственную активность в деятельности предприятия, ограничение $g(x) \le b$ отражает наличие ограниченного набора ресурсов, описываемых вектором с.

Примем условия, что в рассматриваемой задаче оптимизации

$$f(x) \to \max, g(x) \le b, x \subset E_n^+, b \subset E_m^+, \quad (21)$$

функции $f, g^i, i = 1,\dots,m$ выпуклы и существует точка $x^0 \subset E_n^+$ в которой $g(x^0) < b$.

Тогда используя тот же прием, что и в линейном случае, с использованием седловой точки функции Лагранжа для вычислительных экспериментов можно построить вполне эффективные итеративные алгоритмы по технологиям расчётов на основе прямой прогонки.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом, который гласит: каким бы образом управляемая система не оказалась в текущем состоянии, дальнейшее управление должно выбираться из условия оптимальности на дальнейших шагах.

Это принцип позволяет выписать уравнение Беллмана справа налево, от конечного шага принятия решений к первому, что может рассматриваться при вычислительной реализации как обратная прогонка.

Для нашего случая модели предприятия динамическая система и соответствующая задача оптимизации выписывается в общем виде, как аддитивная система $x(t+1) = x(t) + f\left(x(t), u(t)\right)$, где u принадлежит множеству U при терминальном критерии $F\left(x(T)\right)$.

Тогда на шаге $(T-1)$ уравнение Беллмана в соответствии с указанным принципом оптимальности выглядит следующим образом $B\left(x(T-1)\right) = \max\limits_{u(T-1)} F\left(x(T)\right)$, где $B(x)$ - функция Беллмана, $x(T) = x(T-1) + f\left(x(T-1), u(T-1)\right)$, и так далее для всех функций Беллмана на промежуточных шагах $B\left(x(t-1)\right) = \max\limits_{u(t-1)} B\left(x(t)\right)$, $x(t) = x(t-1) + f\left(x(t-1), u(t-1)\right)$.

Если бы можно было считать, что все шаги независимы, тогда оптимальным управлением было бы управление, которое обеспечивало максимальный выигрыш на каждом шаге функции $F(x(t+1))$. В вычислительном отношении это реализуемо выше приведенной прямой прогонкой. Такой подход носит название локально-оптимальной оптимизации, и он часто используется как первое приближение в процессе вычислительных экспериментов для общей нелинейной динамической задачи.

Однако в общей нелинейной динамической системе следует учитывать, что для многошаговых моделей управление на каждом конкретном шаге стоит выбирать с учетом его будущих воздействий на весь процесс.

При практической реализации процедур вычислительных экспериментов множество возможных фазовых состояний представляется в виде набора дискретных значений с соответствующей модификацией уравнений Беллмана.

Заключение

При разработке моделей поддержки принятия решений по управлению развитием реального предприятия целесообразно выработать единообразную системную методологию построения, ориентированную на поддержку принятия различных решений (производственно-технологические, кадровые, финансовые, логистические, маркетинговые, организационные, плановые и оперативные). Такая методология требует использования арсенала математических методов системного анализа, в рамках которого могут использоваться все конструктивные наработки экономико-математического моделирования.

Использование процедур моделирования при управлении на основе возможностей современных информационных технологий обеспечит повышение обоснованности, а также значительное сокращение временных и финансовых затрат на принятие рациональных управленческих решений в сфере управления предприятием. развития экономики.

Список литературы

1. Моисеев, Н. Н. Математические задачи системного анализа : учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика"/ Н. Н. Моисеев. – 1-е изд.– М. : Наука, 1981. – 488 с.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций - М.: Наука. 1971. – 384 с.
3. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Игры с иерархической структурой. /Математическая энциклопедия. т.2. М.: 1979. с.478-482.
4. Горелов М.А., Ерешко Ф.И. Информированность и децентрализация управления // Автоматика и телемеханика, 2019. №6. С. 156–172. DOI: 10.1134/S0005231019060096.
5. Шананин А. А. Двойственность по Янгу и агрегирование балансов // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. С. 81-85. DOI: 10.31857/S2686954320040177
6. Иванов Ю.Н., Сотникова Р.А. Теоретическая экономика. Теория оптимального предприятия. М.: ЛЕНАНД, 2012. 224 с.
7. Сытов А.Н., Имитационные эксперименты с общей финансовой моделью жилищной коалиции. Вторая международная конференция "Управление развитием крупномасштабных систем". MLSD’2008. Доклады. ИПУ РАН, 1-3 октября 2008г. т.2, стр.136-138.
8. Ерешко Ф.И. Модель финансовой Коалиции в динамике. Автоматика и Телемеханика, № 10, 2018. С.76-94.
9. Итеративные методы в теории игр и программировании. Под ред. В.З. Беленького и В.А. Волконского. М.: Наука. 1974. – 239 с.